Početní písemná část z Matematiky II (A) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro níže uvedenou matici $\mathbb{A}$ a pro tři uvedené vektory pravých stran:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & 194 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} 37 \\ 44 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0, 1, f(0, 1)]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x + y}{4}$$

určuje v nějakém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1, f(1)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x, y, z) = x - y^2, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 5, (x + z)^2 + 2y^2 = 2\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2 \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\pi} \right)^{n(n+2)} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

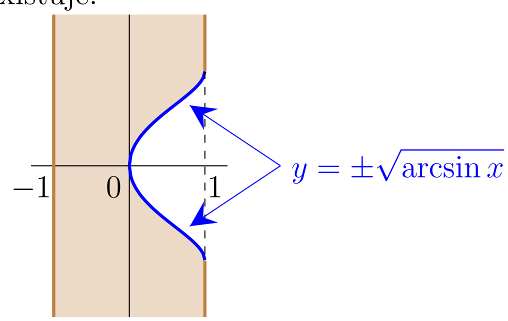
Příklad 1: Pro $\boldsymbol{b}_2$ nemá řešení. Pro $\boldsymbol{b}_1$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[0, 1-62t, t, -1+27t]$, $t \in \mathbb{R}$. Pro $\boldsymbol{b}_3$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[7, 4-62t, t, -8+27t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle -1, 0\rangle$ nebo $x \in (0,1\rangle$ a $y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}\rangle \cup \langle \sqrt{\arcsin x}, +\infty)\}$ (obrázek viz níže, hranice patří do D_f). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{y^2-\arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2}}$ pokud $x \in (-1,1)$ a $y^2 > \arcsin x$ (tj. na vnitřku D_f). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2-\arcsin x}}$, pokud $x \in \langle -1, 1\rangle$ a $y^2 > \arcsin x$ (tj. na D_f bez modré křivky vpravo).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodě $[0,0]$ (v ostatních případech D_f neobsahuje svislou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.



Příklad 3: $f'(1) = -1$, $f''(1) = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$. Rovnice tečny: $y = 1 - 1\cdot(x-1)$ (tj. $y = 2 - x$).

Příklad 4: Maximum $\sqrt{5}$ v bodech $[\sqrt{5}, 0, \pm\sqrt{2-\sqrt{5}}]$, minimum -3 v bodech $[-2, 1, 2]$ a $[-2, -1, 2]$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. (Podle odmocninového kritéria, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1/\pi}$.)

Početní písemná část z Matematiky II (B) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Spočtěte inverzní matici k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 120 & 24 & 6 & 2 \\ 120 & 24 & 6 & 6 \\ 120 & 24 & 24 & 24 \\ 120 & 120 & 120 & 120 \end{pmatrix}.$$

Návod: Uvažte matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením prvního řádku číslem $\frac{1}{2}$, druhého řádku $\frac{1}{6}$, třetího řádku $\frac{1}{24}$ a čtvrtého řádku $\frac{1}{120}$, nejprve spočtěte $\mathbb{B}^{-1}$ a z toho odvoďte tvar $\mathbb{A}^{-1}$. (8 bodů)

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log\left(e^3 - e^{|x|+2|y|}\right),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2})]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\sin(e^x - e^y) + 3\sin\frac{x+y}{2} + \cos(x-y) = 1$$

určuje v nějakém okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\pi)$ a $f''(\pi)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[\pi, f(\pi)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = x^2+5z^2+2y^2, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon (x-z)^2+y^2 = 4, x-7y-z+2 \geq 0\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$$

(10 bodů)

Výsledky

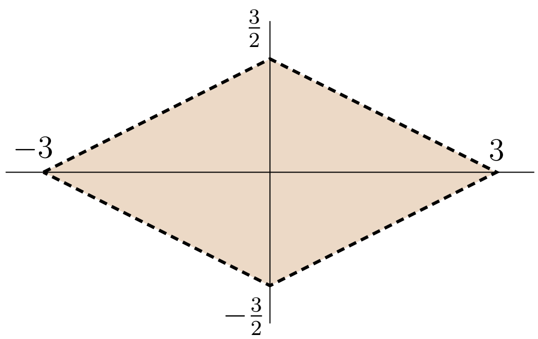
Příklad 1:

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{19}{12} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{11}{6} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{96} & -\frac{1}{480} \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{19}{288} & \frac{1}{96} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{18} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ (obrázek viz níže, je to kosočtverec bez hranice). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \operatorname{sgn} x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}$ pokud $[x,y] \in D_f$ a $x \neq 0$ (tj. vynechá se příslušná část osy y). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \operatorname{sgn} y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}$ pokud $[x,y] \in D_f$ a $y \neq 0$ (tj. vynechá se příslušná část osy x).

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-3,3)$ neexistuje.



Příklad 3: $f'(\pi) = \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}$, $f''(\pi) = \frac{e^\pi - e^\pi \cdot \left(\frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}\right)^2 - \left(1 - \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}\right)^2}{e^\pi + \frac{3}{2}} = \frac{24(2e^{2\pi} - 3}{(2e^\pi + 3^3}$. Rovnice tečny: $y = \pi + \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3} \cdot (x - \pi)$.

Příklad 4: f není na M shora omezená (například body $[n+2, 0, n] \in M$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(n+2,0,n) \to +\infty$), supremum ani maximum tedy neexistuje. Minimum je $\frac{10}{3}$ v bodech $[-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}]$ a $[\frac{5}{3}, 0, -\frac{1}{3}]$. Že jde opravdu o minimum plyne například z toho, že množina $\{[x,y,z] \in M\colon f(x,y,z) \leq C\}$ je kompaktní pro každé $C > 0$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. Řada absolutních hodnot lze srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$.

Početní písemná část z Matematiky II (C) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Spočtěte hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & x-4 & y-5z-12 \\ 9 & 0 & 6 & 9 & 4-z \\ 7 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 10 & -3 & 13 & 10 & 13 \\ 3 & 6 & -15 & 3 & -15 \end{pmatrix}. \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos\left(x - \cos y\right),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 0, f(1,0)]$.

(9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\log \frac{\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y}{3} + \log \frac{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{3} = 0$$

určuje v nějakém okolí bodu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\frac{\pi}{4})$ a $f''(\frac{\pi}{4})$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4})]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = x - y^2 - 2z, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 \le 2, (x-2z)^2 + y^2 = 5\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad 1:

$$\text{Hodnost je} \begin{cases} 5 & \text{pokud } x \neq 1 \text{ a } z \neq -2, \\ 4 & \text{pokud } x \neq 1 \text{ a } z = -2, \text{ nebo } x = 1 \text{ a } z \neq -2, \\ & \text{nebo } x = 1, z = -2 \text{ a } y \neq 3, \\ 3 & \text{pokud } x = 1, z = -2, y = 3. \end{cases}$$

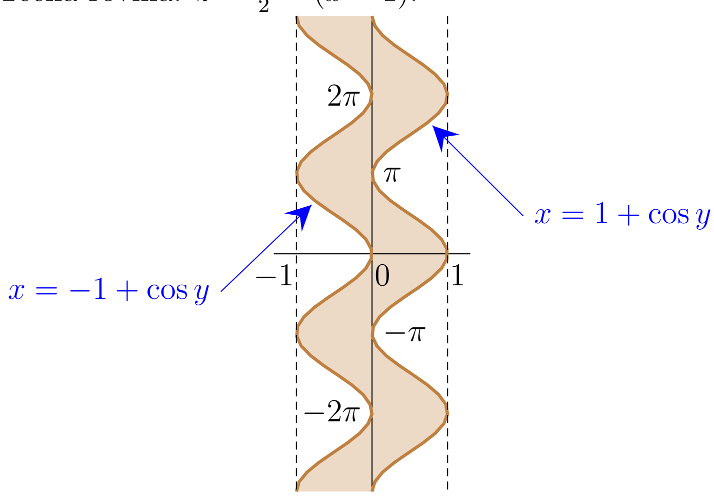
Příklad 2:

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 + \cos y \leq x \leq 1 + \cos y\}$ (obrázek viz níže, hranice je součástí definičního oboru). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sin y}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}}$ pokud $-1 + \cos y < x < 1 + \cos y$ (tj. na vnitřku D_f).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech $[0, k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. (V ostatních případech D_f neobsahuje svislou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial y}(0, k\pi)$ neexistuje.

Tečná rovina: $z = \frac{\pi}{2} - (x - 1)$.



Příklad 3: $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$, $f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{32}{9}$. Rovnice tečny: $y = \frac{\pi}{4} - (x - \frac{\pi}{4})$ (tj. $y = \frac{\pi}{2} - x$).

Příklad 4: Minimum -3 v bodech $[0, \pm 1, 1]$, maximum $\sqrt{5}$ v bodech $[x, 0, \frac{x-\sqrt{5}}{2}]$, $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

Příklad 5: Řada konverguje neabsolutně. Řada absolutních hodnot lze srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Lze použít Leibnizovo kritérium.

Početní písemná část z Matematiky II (D) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 3 & 9 & 5 \\ 10 & 2 & 8 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\mathbb{B}$ nechť je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že první řádek vydělíme dvěma, druhý řádek vydělíme třemi, třetí řádek vydělíme čtyřmi, čtvrtý řádek vydělíme pěti a pátý řádek vydělíme šesti. Spočtěte $\det(\mathbb{A})$ a $\det(\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B}^T)^{-1})$.

(8 bodů)

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \log \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[-1, 3, f(-1, 3)]$.

(9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(x + \sin y) + \operatorname{arctg}(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}$$

určuje v nějakém okolí bodu $[1, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1, f(1)]$.

(8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x, y, z) = 3x^2+y^2+2z^2, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon 9x+9z+8y^2 = 9, x+y+z \leq \tfrac{5}{4}\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \cos \left(\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2 + 1}\right)\right)^2$$

(10 bodů)

Výsledky

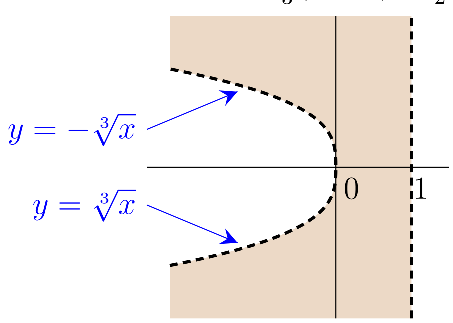
Příklad 1: $\det(\mathbb{A}) = -2000$, $\det(\mathbb{B}) = -\frac{50}{9}$, $\det((\mathbb{B}^T)^{-1}) = -\frac{9}{50}$, $\det(\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B}^T)^{-1}) = 360$.

Příklad 2:

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1) \text{ nebo } x \le 0 \text{ a } y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty)\}$ (obrázek viz níže, hraniční body nepatří do definičního oboru). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-|y|-1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x}(|y|+\sqrt[3]{x})}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \neq 0$ (tj. vynechá se osa y – přesněji osa y bez počátku, který v D_f není). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\operatorname{sgn} y}{|y|+\sqrt[3]{y}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $y \neq 0$ (tj. vynechají se body $[x, 0]$, $x \in (0, 1)$).

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ neexistuje. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (0, 1)$ rovněž neexistuje. má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech

Tečná rovina: $z = -\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3)$.



Příklad 3: $f'(1) = 3$, $f''(1) = 14$. Rovnice tečny: $y = \pi + 3(x - 1)$.

Příklad 4: f není na M shora omezená (například $[1 - \frac{8}{9}y^2, y, 0] \in M$ pro $y > 0$ dost velké a $f(1 - \frac{8}{9}y^2, y, 0) \to +\infty$), maximum ani supremum tedy neexistuje. Minimum je $\frac{441}{512}$ v bodech $[\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{9}{32}]$. Že jde opravdu o minimum plyne například z toho, že množina $\{[x, y, z] \in M : f(x, y, z) \le C\}$ je kompaktní pro každé $C > 0$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. Má nezáporné členy a lze ji srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{4/3}}$.

Početní písemná část z Matematiky II (E) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro níže uvedenou matici $\mathbb{A}$ a pro tři uvedené vektory pravých stran:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin \frac{y + x}{x^2 + x + 1},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, -1, f(1, -1)]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\sin(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2y) + \cos(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2y) = 1$$

určuje v nějakém okolí bodu $[-1, \frac{1}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(-1)$ a $f''(-1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[-1, f(-1)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x, y, z) = (x - z) \cdot y^2, \; M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, x + z \geq \frac{1}{2}\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt[6]{n^2 + 8n} - \sqrt[6]{n^2 - n}}{\sqrt[3]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{n^4 - 2n^2}} \right)^n \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad 1: Pro $\boldsymbol{b}_1$ nemá řešení. Pro $\boldsymbol{b}_2$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[2-5t, 2t-1, 3t-1, t]$, $t \in \mathbb{R}$. Pro $\boldsymbol{b}_3$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[1-5t, 2t, 3t-1, t]$, $t \in \mathbb{R}$.

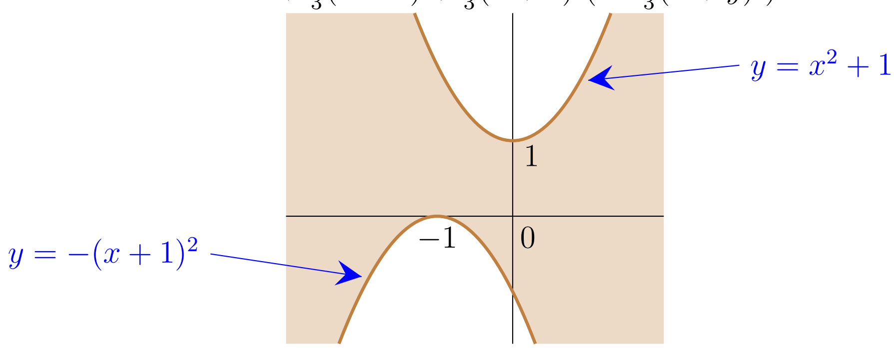
Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -(x+1)^2 \le y \le x^2+1\}$ (obrázek viz níže, hranice patří do D_f). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y+x}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2+1-2xy-y}{(x^2+x+1)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y+x}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$ pokud $-(x+1)^2 < y < x^2+1$ (tj. na vnitřku D_f).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje svislou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech $[0,1]$ a $[-1,0]$ (v ostatních případech D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ neexistují.

Tečná rovina: $z = 0 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(x+1)$ ($= \frac{1}{3}(x+y)$).



Příklad 3: $f'(-1) = -\frac{1}{2}$, $f''(-1) = 0$. Rovnice tečny: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x+1)$ (tj. $y = -\frac{1}{2}x$).

Příklad 4: Maximum $\frac{1}{4}$ v bodech $[\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$, minimum $-\frac{1}{4}$ v bodech $[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. (Podle odmocninového kritéria, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{9}{10}$.)